1 Σύνολα

σύνολο

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακεκριμένα το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα που αποτελούν το σύνολο λέγονται **στοιχεία** του συνόλου.

Κάθε σύνολο το συμβολίζουμε συνήθως με ένα κεφαλαίο (Ελληνικό ή Λατινικό) γράμμα, ενώ τα στοιχεία του συνόλου συνήθως με πεζά γράμματα.

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $\boldsymbol{x \in A}$ και διαβάζουμε «x ανήκει (στο) A» ή «x περιέχεται στο A» ή και «A περιέχει το (στοιχείο) x».

Για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $\boldsymbol{x \notin A}$ και διαβάζουμε «x δεν ανήκει (στο) A» ή «x δεν περιέχεται στο A» ή και «A δεν περιέχει το (στοιχείο) x».

Η Θεωρία Συνόλων είναι μια πολύ γενική θεωρία–«γλώσσα», έτσι είναι αξιοσημείωτο πως όλα αυτά που θα μάθουμε σε αυτά τα κεφάλαια ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα. Δηλαδή μπορούμε να μιλάμε για σύνολα ανθρώπων, σύνολα τραγουδιών, φαγητών, χρωμάτων, συναισθημάτων, κ.ο.κ. Ή ακόμη και σύνολα συνόλων! Συνήθως, βέβαια, για ευκολία και μόνο, θα χρησιμοποιούμε στα παραδείγματά μας σύνολα αριθμών.

Θα πρέπει εδώ να δώσουμε επαρκή έμφαση στο ότι τα αντικείμενα του συνόλου θα πρέπει να είναι **καλά ορισμένα** και **διακεκριμένα**! Δηλαδή θα πρέπει να είναι εντελώς σαφές ποια ακριβώς είναι τα αντικείμενα αυτά (για να το παραφράσουμε: πότε ένα αντικείμενο ανήκει στο σύνολο, και πότε δεν ανήκει), κι επίσης δε θα πρέπει να γράφουμε ένα στοιχείο του συνόλου δύο φορές στην αναγραφή του συνόλου (βλ. παρακάτω).

Παράδειγμα:

Το «σύνολο των καλών μαθητών της Ελλάδας» δεν είναι καλώς ορισμένο σύνολο. Δεν είναι δηλαδή σωστή δήλωση/έκφραση συνόλου. Δεν είναι επαρκώς σαφής.

Ενώ «το σύνολο των παιδιών στην Ελλάδα που αυτή τη στιγμή φοιτούν στην Α΄ λυκείου και έχουν μέσο όρο βαθμών στο πρώτο τετράμηνο της φετινής σχολικής χρονιάς από 18 και πάνω» είναι (καλώς ορισμένο) σύνολο.

Παράσταση Συνόλων

Ένα σύνολο μπορούμε να το παριστάνουμε με τους εξής τρόπους:

- Με **αναγραφή.**
  Γράφουμε μέσα σε άγκιστρα όλα τα στοιχεία του συνόλου, χωρισμένα μεταξύ τους με κόμμα.
  Π.χ. $A = \{1, *, \$\}$
  Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να μην είναι εύκολο να γράψουμε όλα τα στοιχεία του συνόλου (αν είναι πάρα πολλά) αλλά να είναι εύκολο να εννοηθούν (όταν π.χ. προκύπτουν με τη βοήθεια κάποιου «μοτίβου»). Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο «…» παραλείποντας κάποια στοιχεία.
  Π.χ. είναι ευκόλως κατανοητό ότι στο σύνολο $B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ περιέχονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί (βλ. και παρακάτω) από 1 έως 100,
  ή στο σύνολο $\Gamma = \{-4, -2, 0, 2, \dots, 50\}$ όλοι οι άρτιοι ακέραιοι (βλ. και παρακάτω) από -4 έως 50.
  Αντιθέτως, το σύνολο $\Delta = \{1, -5, \pi, \#, \dots, 333\}$ δεν είναι καλώς ορισμένο, διότι δεν είναι σαφώς κατανοητό ποια ακριβώς στοιχεία περιέχει.

- Με **περιγραφή**.
  Είναι από τις πιο συχνές και αποτελεσματικές μεθόδους διατύπωσης, γραφής και χειρισμού συνόλων! Δίνουμε την ή τις ιδιότητες που πρέπει να έχει ένα στοιχείο από

ένα σύνολο αναφοράς, ώστε να ανήκει στο οριζόμενο σύνολο, ακολουθώντας την εξής τυπική γραφή:

$$\{x \in \Omega \mid x\ έχει\ την\ ιδιότητα\ I\}$$

όπου Ω ένα οποιοδήποτε σύνολο αναφοράς. Επίσης, τονίζουμε ότι το x είναι μια «εσωτερική» μεταβλητή του ορισμού του συνόλου (Έχει ύπαρξη και νόημα μόνο εντός των αγκίστρων. Ύστερα από το κλείσιμο των αγκίστρων «ελευθερώνεται» και πάλι).

Π.χ. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι του 5. Δηλαδή το σύνολο A θα μπορούσε να γραφεί και με αναγραφή ως εξής: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Η χρησιμότητα της μεθόδου της περιγραφής αναδεικνύεται μάλιστα όταν το σύνολο είναι πολύ δύσκολο ή χρονοβόρο (ή και αδύνατο) να γραφεί με τις υπόλοιπες μεθόδους.

Π.χ. $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid x\ πρώτος\ αριθμός\}$

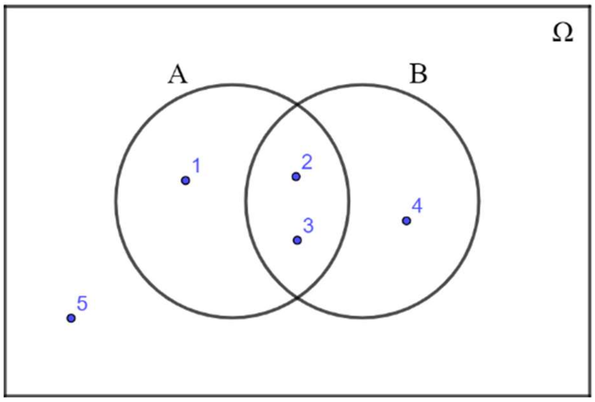
- Με **διαγράμματα Venn**.

  Τα διαγράμματα Venn χρησιμοποιούνται για να δοθεί μια εποπτική αντίληψη και συνοπτική παράσταση των συνόλων. Βοηθούν πολλές φορές στην καλύτερη κατανόηση θεωρητικών εννοιών (π.χ. πράξεων, σχέσεων, κλπ. συνόλων), αλλά και στην επίλυση «πρακτικών» ασκήσεων.

  Συνήθως παριστάνουμε το βασικό σύνολο (Ω) με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου και όλα τα υπόλοιπα σύνολα (που τα στοιχεία τους προέρχονται από το Ω) με το εσωτερικό κλειστών γραμμών (συνήθως κύκλων ή ελλείψεων).

  Π.χ. θα μπορούσαμε να παραστήσουμε τα ακόλουθα σύνολα:

  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 3, 4\}$ με το εξής διάγραμμα Venn:



βασικό σύνολο / κενό σύνολο

Συνήθως για να ξεκινήσει μια συνολοθεωρητική «κουβέντα» (μία θεωρία, μία άσκηση, κλπ.) χρειάζεται να ορίσουμε ένα υπερσύνολο όλων των συνόλων που θα χρειαστούμε. Ένα σύνολο που θα περιέχει όλα τα στοιχεία που υπάρχει περίπτωση να χρειαστούμε. Ένα «αλφάβητο». Αυτό το σύνολο το ονομάζουμε **βασικό σύνολο** ή **καθολικό σύνολο** ή **σύνολο αναφοράς** ή και **σύμπαν** και το συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\Omega}$ ή $\boldsymbol{E}$ (ή $\boldsymbol{U}$ στα Λατινικά).

Αντιθέτως, το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο το ονομάζουμε **κενό σύνολο** και το συμβολίζουμε $\emptyset$ ή $\{\,\}$.

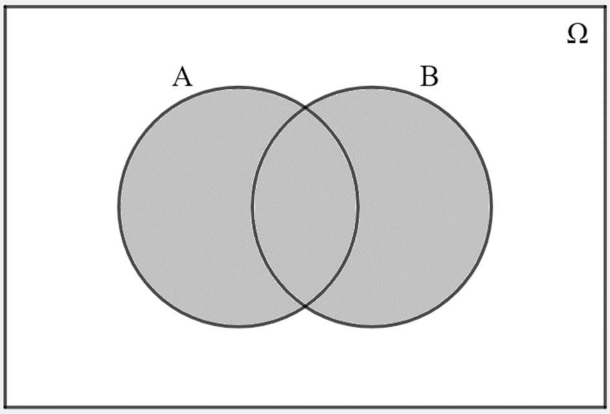
Πράξεις Συνόλων

Έστω ένα βασικό σύνολο Ω και A, B υποσύνολά του Ω. Μπορούμε να ορίσουμε τις εξής πράξεις συνόλων:

ένωση

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$$

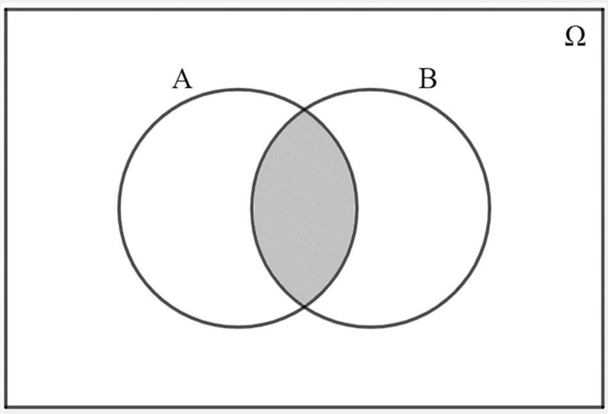
Δηλαδή, η **ένωση** δύο συνόλων αποτελείται από όλα τα (κοινά και μη κοινά) στοιχεία των δύο συνόλων.



τομή

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Δηλαδή, η **τομή** δύο συνόλων αποτελείται μόνο από τα **κοινά στοιχεία** των δύο συνόλων. Για να το πούμε αλλιώς, από τα στοιχεία που ανήκουν **ταυτόχρονα και στα δύο** σύνολα.

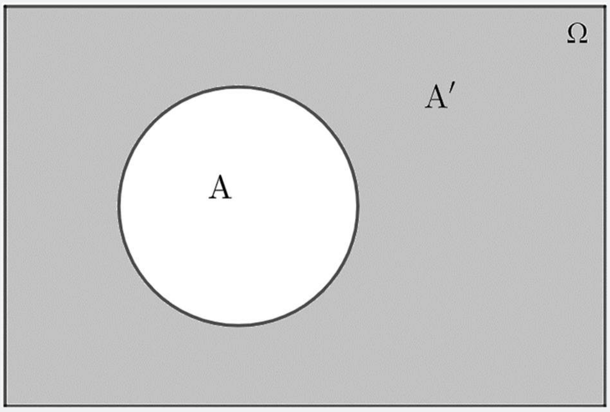


συμπλήρωμα

$$A' = A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Δηλαδή το **συμπλήρωμα** του συνόλου A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του Ω τα οποία **δεν** ανήκουν στο A. Για να το πούμε αλλιώς, αποτελείται από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία εκτός του συνόλου A.

Προσοχή: το συμπλήρωμα δηλαδή είναι μια μονομελής πράξη (ορίζεται επί **ενός** συνόλου), σε αντίθεση προς τις δύο προηγούμενες που ήταν διμελείς πράξεις.

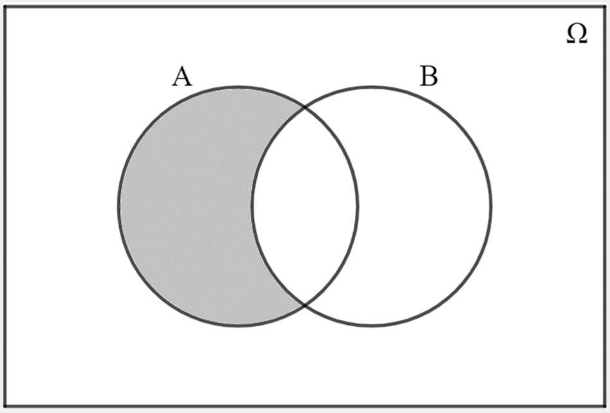


Εκτός των τριών παραπάνω βασικών πράξεων μπορούν να οριστούν και πολλές ακόμη «παράγωγες» πράξεις. Κάποιες από αυτές είναι οι εξής:

διαφορά

$$A - B = A \setminus B = A \cap B' = \{x \in \Omega \mid x \in A \; και \; x \notin B\}$$

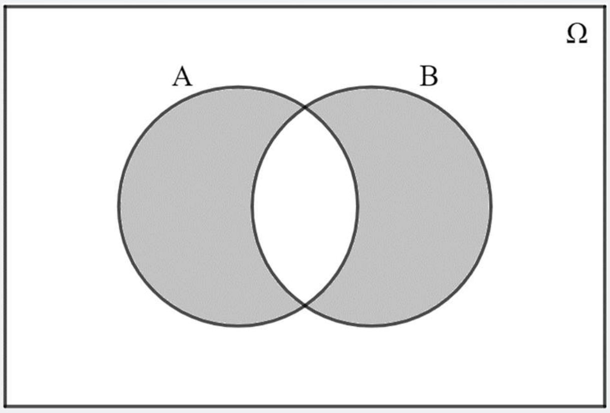
Δηλαδή η **διαφορά** του συνόλου B από το A αποτελείται από όλα τα στοιχεία του συνόλου A τα οποία όμως **δεν** ανήκουν στο σύνολο B. Για να το πούμε αλλιώς, αποτελείται από όλα τα στοιχεία που βρίσκονται **μόνο** στο A και όχι στο B.



(συμμετρική) διαφορά / (διαζευκτικό) άθροισμα

$$A \dotplus B = A \triangle B = A \oplus B = A \ominus B = (A - B) \cup (B - A) = A \cup B - A \cap B$$

Δηλαδή η **συμμετρική διαφορά** ή **διαζευκτικό άθροισμα** των συνόλων A και B αποτελείται από όλα τα στοιχεία που περιέχονται είτε μόνο στο A και όχι στο B, είτε μόνο στο B και όχι στο A. Για να το πούμε αλλιώς, αποτελείται από όλα τα στοιχεία των A και B, εκτός από τα στοιχεία της τομής $A \cap B$.



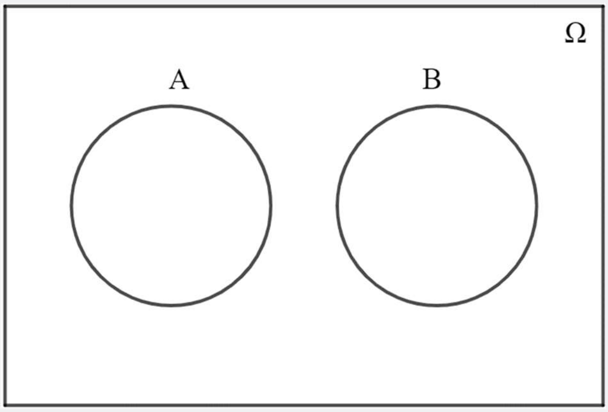
Ένας ορισμός που άπτεται της έννοιας της τομής είναι ο ακόλουθος:

ξένα σύνολα

Δύο σύνολα ονομάζονται **ξένα μεταξύ τους** ή και απλά **ξένα** αν και μόνο αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Δηλαδή A, B είναι ξένα, αν και μόνο αν $A \cap B = \emptyset$.

Σε αυτή την περίπτωση το διάγραμμα Venn των δύο συνόλων κατασκευάζεται ως ακολούθως:



Κάποιες συνολοθεωρητικές ταυτότητες (σχέσεις δηλαδή που ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα). Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη:

		Νόμος / Ιδιότητα
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Ταυτοδύναμου
$A \cup \Omega = \Omega$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	Επικράτησης / Κυριαρχίας
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \Omega = A$	Ταυτοτικού / Ουδέτερου
$A \cup A' = \Omega$ $(A')' = A$	$A \cap A' = \emptyset$	Συμπληρώματος
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Απορρόφησης
$\emptyset' = \Omega$	$\Omega' = \emptyset$	
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	de Morgan
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Αντιμεταθετική
$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$		Προσεταιριστική
$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$ $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$		Επιμεριστική

υποσύνολο

Έστω A, B δύο σύνολα. Λέμε ότι A είναι **υποσύνολο** (του) B και γράφουμε $A \subseteq B$, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο και του B.

Δηλαδή: $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να λέμε και ότι B **υπερσύνολο** (του) A, και να γράφουμε $B \supseteq A$

Η σχέση υποσυνόλου είναι, όπως θα δούμε και παρακάτω, μία σχέση μερικής (και όχι ολικής) διάταξης.

Δηλαδή για κάθε δύο σύνολα A, B δεν είναι απαραίτητο να ισχύει $A \subseteq B$ ή $B \subseteq A$.

Αντιθέτως, μάλιστα, το πιο συχνό είναι να μην ισχύει.

ίσα σύνολα

Δύο σύνολα λέγονται **ίσα** αν και μόνο αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Ισοδύναμα αν το καθένα είναι υποσύνολο του άλλου.

Δηλαδή: $A = B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A) \;\Leftrightarrow\; (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

γνήσιο υποσύνολο

Έστω A, B δύο σύνολα. Λέμε ότι A είναι **γνήσιο υποσύνολο** (του) B και γράφουμε $A \subset B$, αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$.

Δηλαδή: $A \subset B \;\Leftrightarrow\; (A \subseteq B \; και \; A \neq B)$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να λέμε και ότι B **γνήσιο υπερσύνολο** (του) A, και να γράφουμε $B \supset A$

Κάποιες ακόμη συνολοθεωρητικές ταυτότητες. Οι αποδείξεις αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη:

		Νόμος / Ιδιότητα
$A \subseteq A$	$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$	
$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$	$A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$	
$(A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma) \;\Rightarrow\; A \subseteq \Gamma$		Μεταβατική
$A \subseteq B \Rightarrow A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$	$A \subseteq B \Rightarrow A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$	
$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$	$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$	
$A \subseteq B \Leftrightarrow A' \supseteq B'$		
$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$	$A - A = \emptyset$	
$A \cap (B - \Gamma) = A \cap B - A \cap \Gamma$		
$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$		

δυναμοσύνολο

Έστω σύνολο A. **Δυναμοσύνολο** του συνόλου A ονομάζεται το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A, και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$.

Δηλαδή: $\mathcal{P}(A) = \{X \subseteq \Omega \mid X \subseteq A\}$

Προφανώς, το δυναμοσύνολο οποιουδήποτε συνόλου A περιέχει το κενό σύνολο και το ίδιο το σύνολο A.

Δηλαδή, για κάθε σύνολο A ισχύουν: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ και $A \in \mathcal{P}(A)$

Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι τα στοιχεία κάθε δυναμοσυνόλου είναι σύνολα!

Πρέπει να δίνουμε, λοιπόν, μεγάλη προσοχή στους συμβολισμούς…

Παράδειγμα:

Αν $A = \{1, 2\}$, τότε $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$

Ή θα μπορούσαμε να γράψουμε και: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$

Έτσι θα μπορούσαμε να γράψουμε π.χ. ότι: $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ ή ότι: $A \in \mathcal{P}(A)$

Αλλά **όχι** $\{1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, **ούτε** $A \subseteq \mathcal{P}(A)$, **ούτε** $1 \in \mathcal{P}(A)$

Απ’ την άλλη πάλι το $\big\{\{1\}, \{2\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ είναι σωστό!

Εύρεση Δυναμοσυνόλου

Για να βρούμε και να γράψουμε το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A, οργανωμένα, ώστε να μην ξεχάσουμε κάποιο στοιχείο του, προτείνεται να γράφουμε τα υποσύνολα κατά αύξουσα σειρά πληθαρίθμου.

Δηλαδή γράφουμε:

- το κενό, ύστερα
- τα υποσύνολα του A με ένα στοιχείο (μονοσύνολα), ύστερα
- τα υποσύνολα του A με δύο στοιχεία (δισύνολα), ύστερα
- … κ.ο.κ. …
- τέλος γράφουμε και το ίδιο το σύνολο A

Παράδειγμα:

Να βρεθεί το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$

υποσύνολο του A με κανένα στοιχείο: $\emptyset$

υποσύνολα του A με ένα στοιχείο: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

υποσύνολα του A με δύο στοιχεία: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

υποσύνολα του A με τρία στοιχεία, δηλαδή το ίδιο το A: $A = \{1, 2, 3\}$

άρα, συνοψίζοντας: $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

πληθάριθμος

Πληθάριθμος ή **πληθικός αριθμός** ενός συνόλου A ονομάζεται το πλήθος των στοιχείων του A, και συμβολίζεται με $N(A)$ (ή $n(A)$ ή και $|A|$).

Επίσης, αποδεικνύεται ότι:

$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$$

και:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

(και άρα, προφανώς, αν A, B ξένα, τότε $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$)

Παράδειγμα:

Αν $A = \{1, 2, 3, \&\}$

τότε: $n(A) = 4$ και $n(\mathcal{P}(A)) = 2^4 = 16$

διαμέριση

Μία οικογένεια $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ υποσυνόλων του A, λέγεται **διαμέριση** ή **διαμερισμός** του A αν και μόνο αν ισχύουν όλα τα παρακάτω:

- $A_i \neq \emptyset$ για κάθε i
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu = A$

Δηλαδή, με άλλα λόγια, μία διαμέριση ενός συνόλου A είναι μία οικογένεια, μη κενών και ξένων ανά δύο, υποσυνόλων του, η ένωση των οποίων να δίνει το σύνολο A.

Παράδειγμα:

Αν $A = \{1, 2, 3, \&\}$,

τότε μία διαμέριση του συνόλου A είναι τα σύνολα: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, \&\}$ και $A_3 = \{3\}$.

Μία ακόμη διαμέριση του A είναι τα σύνολα: $B_1 = \{1, 3, \&\}$ και $B_2 = \{2\}$.

Και φυσικά υπάρχουν αρκετές ακόμη διαμερίσεις του A.

Λυμένες ασκήσεις

1

Έστω τα σύνολα $\Omega = \{0,*,\#,5,@\}$, $A = \{0,*,@\}$, $B = \{*,\#\}$ και $\Gamma = \{5,@\}$.

Να βρεθούν τα σύνολα:

$A \cup B$	$A \cup \Gamma$	$B \cup \Gamma$	$A \cup B \cup \Gamma$
$A \cap B$	$A \cap \Gamma$	$B \cap \Gamma$	$A \cap B \cap \Gamma$
$A - B$	$B - \Gamma$	$B - A$	$A \dotplus B$

$(A \cup B) \cap \Gamma'$ $\qquad$ $(A \cap B \cap \Gamma) \cup B'$

$(A \cap B)' \cup (A - \Gamma)$ $\qquad$ $(A \cup B \cup \Gamma)' - A$

Λύση:

$A \cup B = \{0,*,@,\#\}$ $\qquad$ $A \cup \Gamma = \{0,*,@,5\}$

$B \cup \Gamma = \{*,\#,@,5\}$ $\qquad$ $A \cup B \cup \Gamma = \{0,*,@,\#,5\} = \Omega$

$A \cap B = \{*\}$ $\qquad$ $A \cap \Gamma = \{@\}$

$B \cap \Gamma = \emptyset$ (Δηλαδή τα B και Γ είναι ξένα μεταξύ τους.)

$A \cap B \cap \Gamma = \emptyset$ $\qquad$ $A - B = \{0,@\}$

$B - \Gamma = \{*,\#\} = B$ $\qquad$ $B - A = \{\#\}$

$A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{0,@\} \cup \{\#\} = \{0,@,\#\}$

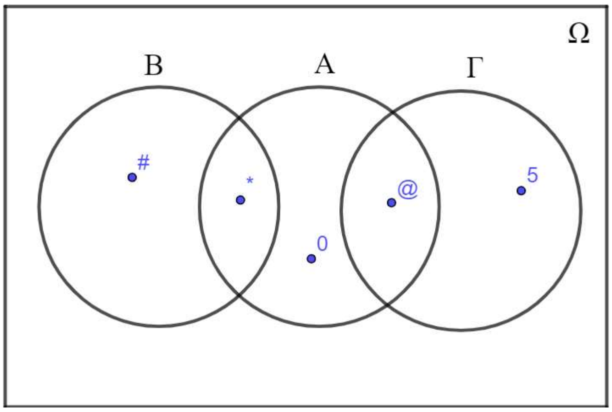
$(A \cup B) \cap \Gamma' = \{0,*,@,\#\} \cap \{5,@\}' = \{0,*,@,\#\} \cap \{0,*,\#\} = \{0,*,\#\}$

$(A \cap B \cap \Gamma) \cup B' = \emptyset \cup B' = B' = \{*,\#\}' = \{0,5,@\}$

$(A \cap B)' \cup (A - \Gamma) = \{*\}' \cup \{0,*\} = \{0, \#, 5, @\} \cup \{0,*\} = \{0,*, \#, 5, @\} = \Omega$

$(A \cup B \cup \Gamma)' - A = \Omega' - A = \emptyset - A = \emptyset$

Πληροφοριακά και μόνο, παρατίθεται και το διάγραμμα Venn:



2

Έστω Ω το σύνολο των μαθητών ενός τμήματος, A το σύνολο των μαθητών (αυτού του τμήματος) που τους αρέσει το ποδόσφαιρο και B το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει το μπάσκετ. Να περιγράψετε (με απλές φράσεις της ελληνικής) τι αναπαριστούν τα ακόλουθα σύνολα:

α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) A' δ) B'

ε) $A - B$ ϛ) $B - A$ ζ) $(A \cup B)'$ η) $(A \cap B)'$

θ) $(A - B) \cup (B - A)$

Λύση:

α) Η ένωση $A \cup B$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει ή το ποδόσφαιρο ή το μπάσκετ (ή φυσικά και τα δύο αθλήματα).

β) Η τομή $A \cap B$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει (ταυτοχρόνως) και το ποδόσφαιρο και το μπάσκετ.

γ) Το συμπλήρωμα A' αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που δεν τους αρέσει το ποδόσφαιρο.

δ) Το συμπλήρωμα B' αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που δεν τους αρέσει το μπάσκετ.

ε) Η διαφορά $A - B$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει **μόνο** το ποδόσφαιρο και όχι το μπάσκετ.

ς) Η διαφορά $B - A$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει **μόνο** το μπάσκετ και όχι το ποδόσφαιρο.

ζ) Το $(A \cup B)'$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που δεν τους αρέσει ούτε το ποδόσφαιρο ούτε το μπάσκετ.

η) Το $(A \cap B)'$ αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που δεν τους αρέσουν και τα δύο αθλήματα ταυτόχρονα. (Δηλαδή τους αρέσει ή το ένα μόνο από τα δύο αθλήματα, ή κανένα από τα δύο.)

θ) Το $(A - B) \cup (B - A)$ (συμμετρική διαφορά) αναπαριστά το σύνολο των μαθητών που τους αρέσει μόνο το ένα από τα δύο αθλήματα (ή μόνο το ποδόσφαιρο και όχι το μπάσκετ, ή μόνο το μπάσκετ και όχι το ποδόσφαιρο).

3

Να αποδείξετε τους κανόνες του de Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ και $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Λύση:

Θα αποδείξουμε τον 1ο κανόνα: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

1ος τρόπος

Ακολουθώντας τον πρώτο τρόπο ορισμού της ισότητας συνόλων

$(A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \; και \; B \subseteq A))$

θα δείξουμε ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα, δείχνοντας ότι το καθένα είναι υποσύνολο του άλλου.

Θα δείξουμε πρώτα ότι: $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$:

$x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A \;\text{και}\; x \notin B) \Rightarrow (x \in A' \;\text{και}\; x \in B') \Rightarrow x \in A' \cap B'$

Άρα δείξαμε ότι $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$ ❶

Θα δείξουμε τώρα ότι: $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$:

$x \in A' \cap B' \Rightarrow (x \in A' \;\text{και}\; x \in B') \Rightarrow (x \notin A \;\text{και}\; x \notin B) \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)'$

Άρα δείξαμε και ότι: $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$ ❷

Άρα, συνολικά, από ❶ και ❷ έπεται: $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

2ος τρόπος

Ακολουθώντας το δεύτερο τρόπο ορισμού της ισότητας συνόλων

$(A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B))$

μπορούμε να δουλέψουμε παρόμοια με πριν, αλλά με διπλές συνεπαγωγές (ισοδυναμίες).

Θα δείξουμε «με τη μία» ότι: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \;\text{και}\; x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A' \;\text{και}\; x \in B') \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$

Τώρα ας δείξουμε και τον 2ο κανόνα του de Morgan: $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (με τον 2ο τρόπο):

$x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A \;\text{ή}\; x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A' \;\text{ή}\; x \in B') \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$

4

Να αποδείξετε τους επιμεριστικούς κανόνες:

α) $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

β) $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

Λύση:

α) $x \in (A \cup B) \cap \Gamma \Leftrightarrow (x \in A \cup B \; \textit{και} \; x \in \Gamma) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ή } x \in B) \; \textit{και} \; x \in \Gamma\big) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big((x \in A \; \textit{και} \; x \in \Gamma) \text{ ή } (x \in B \; \textit{και} \; x \in \Gamma)\big) \Leftrightarrow (x \in A \cap \Gamma \text{ ή } x \in B \cap \Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \big((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)\big)$

Άρα δείξαμε ότι: $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

β) $x \in (A \cap B) \cup \Gamma \Leftrightarrow (x \in A \cap B \text{ ή } x \in \Gamma) \Leftrightarrow \big((x \in A \; \textit{και} \; x \in B) \text{ ή } x \in \Gamma\big) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \big((x \in A \text{ ή } x \in \Gamma) \; \textit{και} \; (x \in B \text{ ή } x \in \Gamma)\big) \Leftrightarrow (x \in A \cup \Gamma \; \textit{και} \; x \in B \cup \Gamma) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \big((A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)\big)$

Άρα δείξαμε ότι: $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ

1. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

α) $A \subseteq A$

β) $A' \subseteq (A-B)'$

γ) $A \subseteq A \cup B$

δ) $A \cap B \subseteq B$

ε) $A \cup B \subseteq A \cap B$

ς) $A \cap A' = \emptyset$

ζ) $B \cup B' = \Omega$

η) $(A-B) \cap (B-A) = \Omega$

θ) $A \subseteq A - B$

ι) $(A-B) \cap (B-A) \subseteq A \cup B$

ια) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$

ιβ) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$

ιγ) $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma, \alpha\}$

ιδ) Αν $A = \emptyset$ και $B = \{\ \}$, τότε $A = B$

ιε) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

ις) Αν $A \subseteq B$ και $A \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq B \cap \Gamma$

ιζ) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A'$, τότε $A = \emptyset$

ιη) $(A \cup B') \cup B = \Omega$

2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

α) $0 \in \emptyset$

β) $\emptyset \in \emptyset$

γ) $\emptyset \subseteq \emptyset$

δ) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

ε) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

ς) $\{0\} \in \{0\}$

ζ) $0 \in \{0\}$

η) $\{0\} \subseteq \{0\}$

θ) $\{\alpha\} \in \{\alpha, \beta\}$

ι) $\{\alpha\} \in \{\{\alpha\}, \beta\}$

ια) $\{\alpha\} \subseteq \{\alpha, \beta\}$

ιβ) $\{\alpha\} \subseteq \{\{\alpha\}, \beta\}$

ιγ) $\{\{\alpha\}\} \subseteq \{\{\alpha\}, \beta\}$

ιδ) $\{\alpha, \beta\} \subseteq \{\{\alpha\}, \beta\}$

ιε) $A \in \mathcal{P}(A)$

ις) $A \subseteq \mathcal{P}(A)$

3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

α) $N(A) = N(B) \Rightarrow A = B$

β) $A = B \Rightarrow N(A) = N(B)$

γ) $A \subseteq B \Rightarrow N(A) \leq N(B)$

δ) $N(A) \leq N(B) \Rightarrow A \subseteq B$

ε) $N(A \cap B) \leq N(A \cup B)$

ϛ) $N(A - B) \leq N(A \cap B)$

ζ) $N(\emptyset) = 0$

η) $N(A) = 0 \Rightarrow A = \{0\}$

θ) $N(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

ι) $N\big(\mathcal{P}(A)\big) > N(A)$

ια) $N(A \dotplus B) \leq N(A)$

ιβ) $N(A \dotplus B) \leq N(A \cup B)$

ιγ) $N(A - B) \leq N(A \dotplus B)$

ιδ) $N(A - B) = N(A) - N(B)$

ιε) $N(A - B) \leq N(A)$

ιϛ) $N(A - B) = N(A) - N(A \cap B)$

ιζ) $N(A \cap B) + N(A \cup B) = N(A) + N(B)$

ιη) $N(A) + N(B) \leq N(A \cup B) \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

ιθ) $N(A) = N(\Omega) - N(A')$

κ) $N((A \cup B)') = N(A') + N(B')$

ΣΥΝΟΛΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

4. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ και $B = \{1, 5, 6\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cup B$

β) $A \cap B$

γ) A'

δ) B'

ε) $A - B$

ϛ) $B - A$

και κατόπιν να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn.

5. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ και $B = \{1, 2, 5\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cup B$

β) $A \cap B$

γ) A'

δ) B'

ε) $A - B$

ϛ) $B - A$

και κατόπιν να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn.

6. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{4, 5, 6\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cup B$

β) $A \cap B$

γ) A'

δ) B'

ε) $A - B$

ς) $B - A$

και κατόπιν να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn.

7. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ και $\Gamma = \{1, 4, 7\}$ να βρείτε τα σύνολα:

α) $(A \cup B)'$

β) $A' \cap B'$

γ) $(A \cap B)'$

δ) $A' \cup B'$

ε) $(A \cap B) \cup \Gamma$

ς) $(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma)$

ζ) $(A \cup B) \cap \Gamma$

η) $(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

θ) $(A - B) - \Gamma$

ι) $A - (B - \Gamma)$

Τι παρατηρείτε;

8. Αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{2, 5\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $(A \cup B) \cap A'$

β) $(A \cap B) \cap A'$

γ) $(A \cap B) \cup A'$

δ) $(A \cup B) \cup A'$

9. Αν $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, $A - B = \{1,4,5\}$, $B - A = \{2,6\}$ και $(A \cup B)' = \{3\}$, να βρείτε τα σύνολα A και B.

10. Αν $A \dotplus B = \{1,2,3,4\}$, $A' = \{2,4,5,7\}$ και $A \cap B = \{6\}$, να βρείτε τα σύνολα Ω, A και B, και να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn.

11. Αν $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,5,7\}$ και $\Gamma = \emptyset$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $(A \cup B)' \cup \Gamma$

β) $(A - B) \cap \Gamma \cap (A \cup B)$

γ) $A \cup (B - \Gamma)' \cup (\Gamma - A)$

δ) $(A - B) \cup (B - \Gamma) \cup (\Gamma - A)$

ε) $\big(A \cup (B \cup \Gamma')\big) \cap \big(B \cup (A' \cup \Gamma)\big)$

ς) $((A - B)' \cap (B - A)') \cup \Gamma'$

12. Αν $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn για καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) $A = \{0,2,4,7\}$, $B = \{0,3,5,7\}$ και $\Gamma = \{0,2,3,6\}$

β) $A = \{0,1,2,3,6\}$, $B = \{2,3,5,8\}$ και $\Gamma = \{0,1,5,7\}$

γ) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2,3,5,6\}$ και $\Gamma = \{6,7,8\}$

δ) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{0,1,5,8\}$ και $\Gamma = \{0,1,4\}$

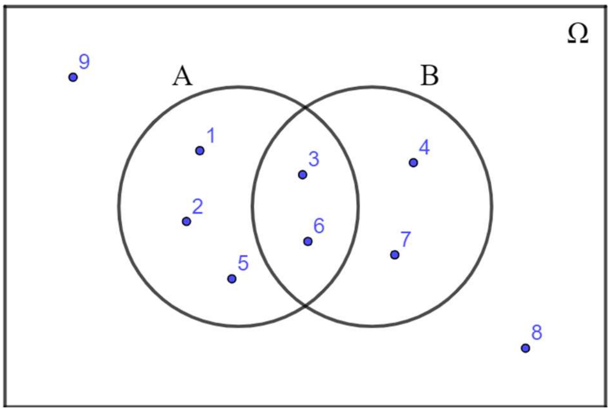
ε) $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{2,3,5,8\}$ και $\Gamma = \{2,3,4,5,6\}$

ς) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{3,5,8\}$ και $\Gamma = \{4,6\}$

ζ) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{3,5,8\}$ και $\Gamma = \{4,6,7\}$

η) $A = \{0,1,2\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ και $\Gamma = \{4,6,7\}$

13. Αν Ω, A, B σύνολα όπως φαίνονται στο ακόλουθο διάγραμμα Venn:



τότε να βρείτε τα ακόλουθα σύνολα:

α) $A \cap B$ β) $A \cup B$ γ) A' δ) B'

ε) $A - B$ ς) $B - A$ ζ) $A \dotplus B$ η) $A \cap B'$

θ) $A \cup B'$ ι) $(A \cup B)'$ ια) $(A \cap B)'$

14. Αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{1, 3, 6\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cap (B - \Gamma)$ β) $(A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

γ) $A \cup (B - \Gamma)$ δ) $(A \cup B) - (A \cup \Gamma)$

Τι παρατηρείτε;

15. Αν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{1, 3, 6\}$, να βρείτε τα σύνολα:

α) $A \cap (B \dotplus \Gamma)$ β) $(A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$

γ) $A \cup (B \dotplus \Gamma)$ δ) $(A \cup B) \dotplus (A \cup \Gamma)$

Τι παρατηρείτε;

16. Να δείξετε τις σχέσεις:

α) $A \dotplus A = \emptyset$

β) $A \dotplus \emptyset = \emptyset \dotplus A = A$

γ) $A \dotplus B = B \dotplus A$

δ) $(A \dotplus B) \dotplus \Gamma = A \dotplus (B \dotplus \Gamma)$

ε) $A \dotplus B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

ς) $A \dotplus B = A' \dotplus B'$

ζ) $(A \dotplus B) \dotplus (\Gamma \dotplus A) = B \dotplus \Gamma$

η) $A \cap (B \dotplus \Gamma) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$

θ) $(A \cap B)' = (A' \cap B') \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

17. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $(A \dotplus B) \dotplus (\Gamma \dotplus A) \dotplus (B \dotplus \Gamma) \dotplus (A \dotplus B \dotplus \Gamma)$

β) $(A \dotplus B \dotplus \Gamma) \dotplus B \dotplus (\Gamma \dotplus A \dotplus B) \dotplus \Gamma \dotplus (B \dotplus \Gamma \dotplus A)$

18. Να δείξετε τις σχέσεις:

α) $X \dotplus A = B \Leftrightarrow X = B \dotplus A$

β) $X \dotplus A = \emptyset \Leftrightarrow X = A$

19. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ,

α) να δείξετε ότι:

$$(A \cup B) \cap (B \cup \Gamma) \cap (\Gamma \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap \Gamma) \cup (\Gamma \cap A)$$

β) να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$[(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)] \cap (A \cup B)$$

$$[(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)] \cup [(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)]$$

20. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ να δείξετε ότι:

α) $A - (A - B) = A \cap B$

β) $A \cap (B - A) = \emptyset$

γ) $(A-B)\cup(A-\Gamma)=A-(B\cap\Gamma)$

δ) $(A-B)\cap(A-\Gamma)=A-(B\cup\Gamma)$

ε) $(A-\Gamma)\cup(B-\Gamma)=(A\cup B)-\Gamma$

ς) $A\cup(B-A)=A\cup B$

ζ) $(A\dotplus B)'=(A\cap B)\cup(A\cup B)'$

η) $(A\dotplus B)\cap A=A-(A\cap B)$

θ) $A\dotplus B=(A-A\cap B)\cup(B-A\cap B)$

ι) $A-(A\cap B)=A-B$

ια) $(A\cap B)-B=\emptyset$

Υποσυνολα

21. Αν $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$, να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn για καθεμία από τις επόμενες περιπτώσεις:

α) $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ και $\Gamma=\{0,3,5\}$

β) $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{0,2,3\}$ και $\Gamma=\{0,4,5,7\}$

γ) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{1,2,3,5\}$ και $\Gamma=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

δ) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{5,6\}$ και $\Gamma=\{0,1,2,3,5,6,8\}$

22. Έστω $A=\{\alpha,\beta\}$ σε ένα βασικό σύνολο $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Να βρείτε:

α) όλα τα υπερσύνολα του συνόλου A.

β) όλα τα σύνολα B, τέτοια ώστε $A\cap B\neq\emptyset$

γ) όλα τα σύνολα Γ, τέτοια ώστε $A\cap\Gamma=\emptyset$

23. Να βρείτε το δυναμοσύνολο των παρακάτω συνόλων:

α) $\emptyset$

β) $\{\emptyset\}$

γ) $\{1\}$

δ) $\{*,1\}$

ε) $\{1, 2, 4\}$

ς) $\{0, 1, 2, 3\}$

ζ) $\{\{1\}, 2\}$

η) $\{\{1, 2\}, 2\}$

θ) $\{\{1, 2\}, 1, 2\}$

ι) $\mathcal{P}(\{1,2\})$

24. Δίνονται τα σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B = \{\{\alpha\}, \beta, \gamma\}$.

Α. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

1) $\alpha \in A$ **2)** $\alpha \in B$ **3)** $\{\alpha\} \in A$ **4)** $\{\alpha\} \in B$

5) $\alpha \subseteq A$ **6)** $\alpha \subseteq B$ **7)** $\{\alpha\} \subseteq A$ **8)** $\{\alpha\} \subseteq B$

9) $\{\{\alpha\}\} \subseteq A$ **10)** $\{\{\alpha\}\} \subseteq B$

11) $\alpha \in \mathcal{P}(A)$ **12)** $\{\alpha\} \in \mathcal{P}(A)$ **13)** $\alpha \in \mathcal{P}(B)$ **14)** $\{\alpha\} \in \mathcal{P}(B)$

15) $\alpha \subseteq \mathcal{P}(A)$ **16)** $\{\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ **17)** $\alpha \subseteq \mathcal{P}(B)$ **18)** $\{\alpha\} \subseteq \mathcal{P}(B)$

19) $\{\{\alpha\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ **20)** $\{\{\alpha\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$

21) $\{\emptyset\} \subseteq A$ **22)** $\{\emptyset\} \subseteq B$ **23)** $\emptyset \subseteq A$ **24)** $\emptyset \subseteq B$

Β. Να βρείτε τα εξής σύνολα: $A \cup B,\ A \cap B,\ A - B,\ B - A,\ A \dotplus B$

Γ. Να βρείτε τα δυναμοσύνολα των συνόλων A και B.
(Δηλαδή τα σύνολα $\mathcal{P}(A)$ και $\mathcal{P}(B)$.)

25. Να αποδείξετε τις ακόλουθες σχέσεις:

$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ και $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

26. Να βρεθούν όλες οι δυνατές διαμερίσεις των παρακάτω συνόλων:

$A = \{0\}$

$B = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, 2\}$

$\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$

27. Να παραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid -2 < x \leq \frac{7}{3} \right\}$ $\qquad$ $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{7}{3} < x \right\}$

και στη συνέχεια να βρείτε τα παρακάτω σύνολα (δίνεται $\Omega = \mathbb{Z}$):

α) A' $\qquad$ β) B'

γ) $A \cup B$ $\qquad$ δ) $A \cap B$

ε) $A - B$ $\qquad$ ς) $B - A$

28. Να παραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2\kappa \, , \kappa \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2\kappa \, , \kappa \in \mathbb{Z}\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2\kappa \, , \kappa \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2\kappa \, , \kappa \in \mathbb{Z}\}$

ε) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3\kappa \, , \kappa \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ ς) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = -3\kappa \, , \kappa \in \mathbb{Z}\}$

ζ) $Z = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = -3\kappa \, , \kappa \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ η) $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x = -3\kappa \, , \kappa \in \mathbb{Z}\}$

θ) $\Theta = \{x \in \mathbb{N} \mid x = -3\kappa \, , \kappa \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ ι) $I = \big\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3\kappa \, , \kappa \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}\big\}$

29. Να παραστήσετε με αναγραφή τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 4\}$ $\qquad$ β) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 3\}$

γ) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1{,}9 \leq x < 3{,}1\}$ $\qquad$ δ) $\Delta = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5{,}82 \leq x \leq -2{,}1\}$

ε) $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 4\}$ $\qquad$ ς) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$

30. Να παραστήσετε με περιγραφή τα παρακάτω σύνολα:

α) $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\qquad$ β) $B = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$

γ) $\Gamma = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

δ) $\Delta = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$

ε) $E = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$

ς) $S = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

ζ) $Z = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

η) $H = \{3, 5, 7, 9, \dots, 99\}$

θ) $\Theta = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

ι) $I = \{-50, -40, -30, \dots, 30, 40, 50\}$

ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

31. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα παρακάτω σύνολα να είναι ίσα:

α) $A = \{0, 3, x, 9\}$ και $B = \{y, 0, 3, 7\}$

β) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ και $B = \{x, 0, 1, y\}$

γ) $A = \{4, x, 1\}$ και $B = \{y, 4, y - 1\}$

δ) $A = \{0, x, 1\}$ και $B = \{y, 0, -y\}$

ε) $A = \{0,\ 1,\ x - 1,\ 2 + y\}$ και $B = \{1,\ 0,\ 2x + 1,\ -y - 2\}$

ς) $A = \{1, x, 2\}$ και $B = \{y, 2, y - 1\}$

ΠΛΗΘΑΡΙΘΜΟΣ

32. Να βρεθούν οι πληθάριθμοι των παρακάτω συνόλων:

$A = \emptyset$	$B = \{\emptyset\}$	$\Gamma = \{*\}$
$\Delta = \{\{*\}\}$	$E = \{1,3\}$	$S = \{\{1\}, 3\}$
$Z = \{\{1, 2\}\}$	$H = \{\{1\}, \{2\}\}$	$\Theta = \{\{1, 2\}, 3\}$
$I = \mathcal{P}(\{\emptyset\})$	$K = \mathcal{P}(\{1, 2\})$	$\Lambda = \mathcal{P}(\{1, \{2, 3\}\})$

33. Να βρεθούν οι πληθάριθμοι των παρακάτω συνόλων:

$A = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

$\Gamma = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$

$\Delta = \{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$

$E = \{5, 6, 7, 8, \dots, 27\}$

$S = \{-27, -26, -25, \dots, -7\}$

$Z = \{-18, -17, -16, \dots, 0\}$

$H = \{-22, -21, -20, \dots, 11, 12, 13\}$

34. Να βρεθούν οι πληθάριθμοι των παρακάτω συνόλων:

$A = \{0, 2, 4, 6, \dots, 38\}$

$B = \{3, 6, 9, \dots, 333\}$

$\Gamma = \{32, 36, 40, \dots, 104\}$

$\Delta = \{-55, -50, -45, \dots, 115\}$

$E = \{-88, -77, -66, \dots, 121\}$

$S = \{-49, -42, -35, \dots, 77\}$

$Z = \{-104, -100, -96, \dots, -16\}$

$H = \{-1010, -1000, -990, \dots, 0\}$

35. Να βρεθούν οι πληθάριθμοι των παρακάτω συνόλων:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -1 \leq \kappa \leq 6\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -1 \leq \kappa \leq 6\}$

$\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -1 \leq \kappa \leq 6\}$

$\Delta = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -1 \leq \kappa \leq 6\}$

$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -7 \leq \kappa \leq 3\}$

$S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = -5\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -7 \leq \kappa \leq 3\}$

$Z = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 7\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -13 \leq \kappa \leq -3\}$

$H = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 4\kappa, \kappa \in \mathbb{Z}, -11 \leq \kappa \leq 0\}$

36. Έστω τα σύνολα A και B, τέτοια ώστε: $N(A \cap B) = 3$, $N(A - B) = 5$ και $N(B) = 7$. Να βρεθούν οι πληθάριθμοι: $N(A)$ και $N(B - A)$.

37. Να αποδείξετε ότι: $N(A \dotplus B) = N(A) + N(B) - 2 \cdot N(A \cap B)$

38. Μία τάξη έχει 25 μαθητές. Από αυτούς οι 19 μιλάνε Αγγλικά, οι 12 μιλάνε Γαλλικά και οι 10 μιλάνε και Αγγλικά και Γαλλικά. Να βρεθεί πόσοι μαθητές δε μιλάνε ούτε Αγγλικά ούτε Γαλλικά.

39. Θεωρούμε τα σύνολα:

$A = \{θεατές\ της\ τελετής\ έναρξης\ των\ Ολυμπιακών\ αγώνων\ του\ 2004\}$

$B = \{θεατές\ της\ τελετής\ λήξης\ των\ Ολυμπιακών\ αγώνων\ του\ 2004\}$

Σε ποιο σύνολο ανήκει εκείνος που:

α) παρακολούθησε και τις δύο τελετές;

β) παρακολούθησε (τουλάχιστον) μία από τις δύο τελετές;

γ) παρακολούθησε ακριβώς μία από τις δύο τελετές;

δ) παρακολούθησε την τελετή έναρξης, αλλά όχι την τελετή λήξης;

ε) παρακολούθησε την τελετή λήξης, αλλά όχι την τελετή έναρξης;

ς) δεν παρακολούθησε καμία από τις δύο τελετές; (Δηλαδή δεν παρακολούθησε την τελετή έναρξης και δεν παρακολούθησε την τελετή λήξης.)

40. Έστω ένα βασικό σύνολο: $\Omega = \{όλοι\ οι\ μαθητές\ μιας\ τάξης\}$ και εντός του, τα σύνολα:

$A = \{οι\ μαθητές\ που\ είναι\ καλοί\ στα\ Μαθηματικά\}$

$B = \{οι\ μαθητές\ που\ είναι\ καλοί\ στα\ Αρχαία\}$

[Ας θεωρήσουμε ότι το «καλοί» είναι καλώς ορισμένο, π.χ. αυτοί που έχουν πάρει βαθμό ≥ 15]

Τι αναπαριστούν τα ακόλουθα σύνολα; (περιγράψτε με φράσεις της ελληνικής γλώσσας)

α) $A \cup B$ β) $A \cap B$ γ) A' δ) B'

ε) $A - B$ ς) $B - A$ ζ) $(A \cup B)'$ η) $(A \cap B)'$

θ) $A \dotplus B$

41. Θεωρούμε τα σύνολα:

$A = \{άνθρωποι\ που\ ακούνε\ μουσική\ Rock\}$

$B = \{άνθρωποι\ που\ ακούνε\ κλασική\ μουσική\}$

$\Gamma = \{άνθρωποι\ που\ ακούνε\ παραδοσιακή\ μουσική\}$

α) Να εκφράσετε με διαγράμματα Venn, αλλά και με τις γνωστές πράξεις συνόλων, τα ακόλουθα σύνολα:

$\Delta = \{άνθρωποι\ που\ ακούνε\ τουλάχιστον\ δύο\ από\ τα\ παραπάνω\ είδη\ μουσικής\}$

$E = \{άνθρωποι\ που\ ακούνε\ το\ πολύ\ ένα\ από\ τα\ παραπάνω\ είδη\ μουσικής\}$

β) Να εκφράσετε με λόγια τι αναπαριστούν τα ακόλουθα σύνολα:

$A \cup B \cup \Gamma$ $\qquad$ $A \cap B \cap \Gamma$ $\qquad$ $(A \cup B)'$ $\qquad$ $A' \cup B' \cup \Gamma'$